Решение текстовых задач алгебраическим способом

Что такое текстовая задача?

Текстовая задача – это задача, условие которой сформулировано на естественном языке.
В ней описывается какая-либо ситуация из реальной жизни, науки, техники или быта.
Требуется найти неизвестное значение или значения, связанные с этой ситуацией.

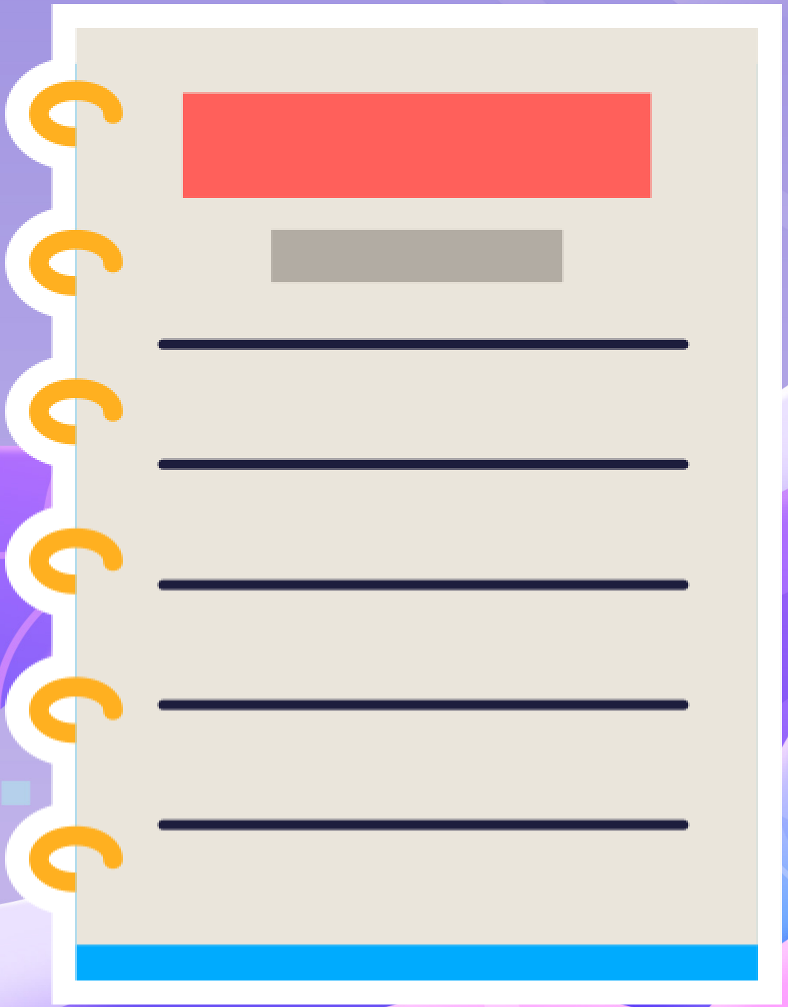
Почему возникают сложности?

Почему задачи кажутся трудными?

- Непонимание условия: иногда сложно разобраться в формулировках.
- Отсутствие прямой формулы: нет готового шаблона для решения.
- Перевод с “естественного” на “математический” язык: главная сложность!

Алгебраический способ: Наш главный инструмент!

Суть: С помощью одной или нескольких переменных (чаще всего x, y и т.д.). Мы составляем математическую модель задачи.
Эта модель обычно представляет собой уравнение или систему уравнений.
Решая эти уравнения, мы находим ответы на вопросы задачи.



Этапы решения текстовой задачи алгебраическим способом

1. Чтение и анализ условия: внимательно понять, что дано и что нужно найти.
2. Введение переменных: обозначить неизвестные величины буквами.
3. Составление уравнения/системы уравнений: перевести условие задачи на язык алгебры.
4. Решение уравнения/системы: использовать известные методы решения.
5. Проверка: убедиться, что найденный ответ соответствует условию задачи.
6. Запись ответа: сформулировать ответ на естественном языке.

Этап 1: Чтение и анализ условия

Читаем внимательно: выделяем главное

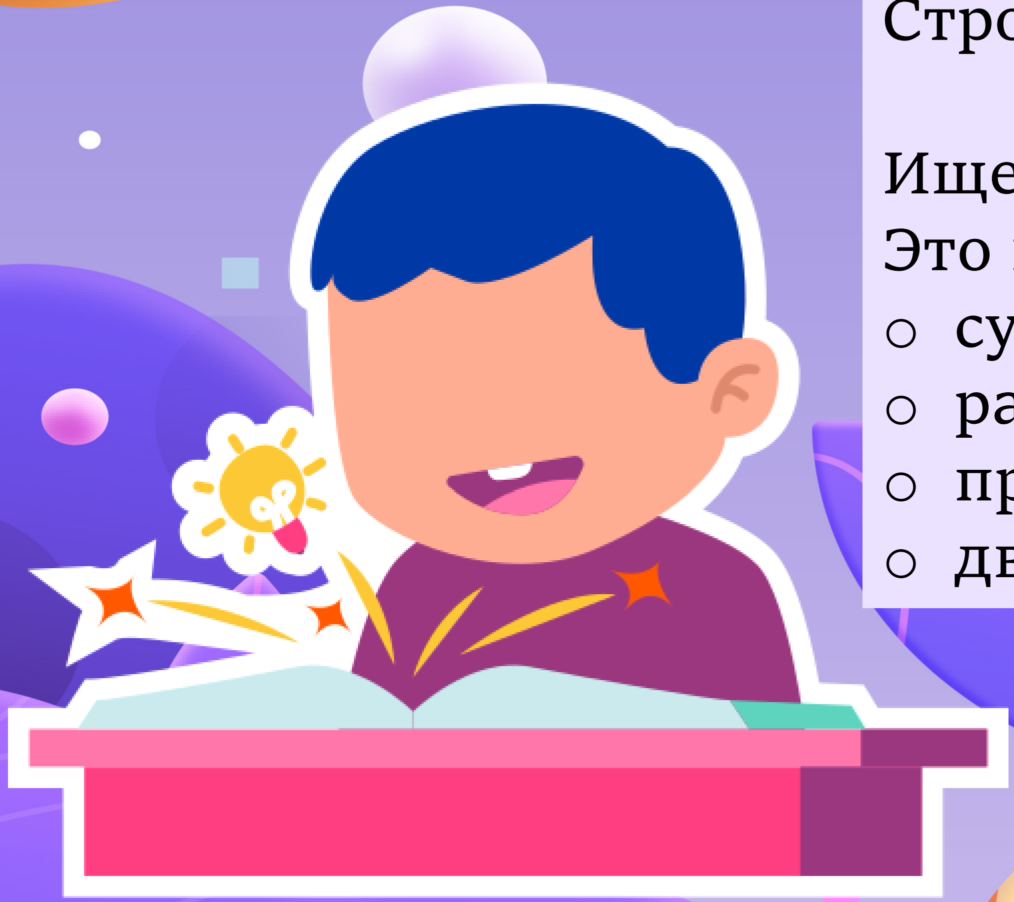
Что известно? (Числа, величины, связи между ними).
Что нужно найти? (Неизвестные величины).
Каковы взаимосвязи? (Скорость, время, расстояние; цена, количество, стоимость; возраст и т.д.).

Этап 2: Введение переменных

Обозначаем неизвестное:
пусть x будет...

Выбираем одну переменную для обозначения главного неизвестного (или того, что легче всего выразить через другие).
Другие неизвестные величины выражаем через эту переменную, используя условия задачи.
Важно: определить, что именно обозначает каждая переменная!

Этап 3: Составление уравнения



Строим уравнение: переводим слова в знаки

Ищем ключевое равенство в условии задачи. Это может быть:

- сумма двух величин равна чему-то;
- разность двух величин равна чему-то;
- произведение равно чему-то;
- два выражения равны друг другу.

Типы задач и типичные уравнения

Задачи на движение: $S = v \times t$ (расстояние = скорость × время):
Если объекты движутся навстречу: $v1 \times t + v2 \times t = S$;
Если объекты движутся в одном направлении (догоняют):
$v1 \times t - v2 \times t = S$.

Задачи на работу: $A = P \times T$
(объем работы = производительность × время);
Если работают вместе: $P1 \times T + P2 \times T = A(\text{общий})$.

Задачи на проценты: $\text{Часть} = \text{Целое} \times \frac{\text{Процент}}{100}$.

Задачи на смеси и сплавы:

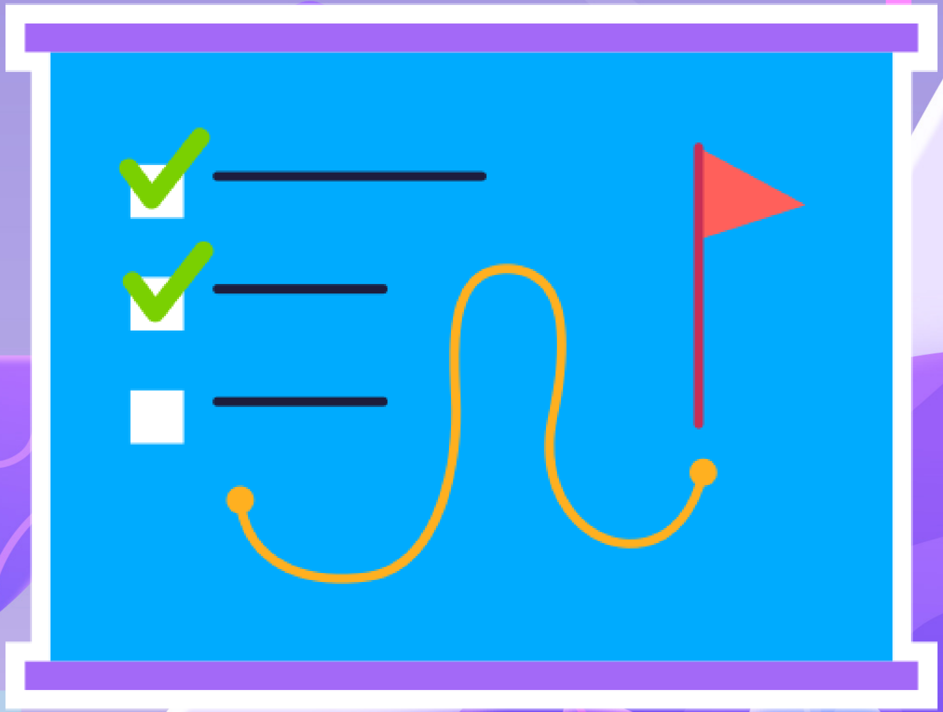
$$\text{Масса\_вещества} = \text{Общая\_масса} \times \frac{\text{Процент\_вещества}}{100}.$$

Пример: задача на движение (одна переменная)

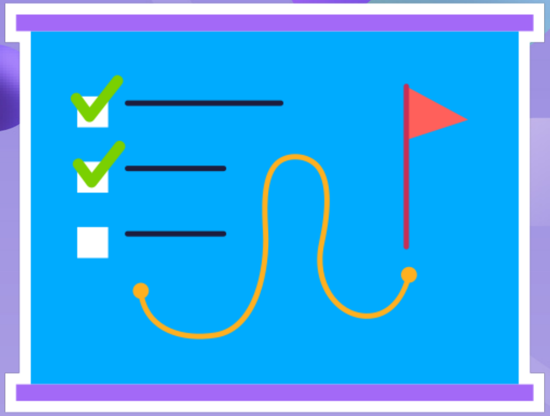
Условие: из двух городов, расстояние между которыми составляет 300 км, одновременно навстречу друг другу выехали два автомобиля. Скорость первого автомобиля на 10 км/ч больше скорости второго.
Найдите скорость каждого автомобиля, если они встретились через 2 часа.

Анализ:

- Дано: $S = 300$ км, $t = 2$ ч, $v_1 = v_2 + 10$;
- Найти: v_1, v_2.



Решение примера: задача на движение



Переменная: пусть x км/ч — скорость второго автомобиля;
Выражаем: скорость первого автомобиля: x + 10 км/ч;
Уравнение: поскольку они едут навстречу друг другу, их скорости складываются; расстояние, которое они проехали вместе, равно общему расстоянию: $(x + (x + 10)) \times 2 = 300$.

$4x + 20 = 300$
$4x = 280$
$x = 70$ (км/ч) — скорость второго автомобиля
Находим скорость первого:
$x + 10 = 70 + 10 = 80$ (км/ч)
Ответ: Скорость второго автомобиля — 70 км/ч, первого — 80 км/ч.

Пример: Задача на совместную работу (система уравнений)

Условие: Два цеха вместе могут изготовить 150 деталей за 5 дней. Первый цех, работая самостоятельно, может изготовить эти 150 деталей за 9 дней. За сколько дней второй цех может изготовить 150 деталей, работая самостоятельно?

Пусть x — количество дней, за которое второй цех может изготовить 150 деталей, работая самостоятельно.

Решение примера:
Задача на совместную работу

Сначала определим производительность каждого цеха. Производительность первого цеха — это количество деталей, которое он может изготовить за один день. Если первый цех может изготовить 150 деталей за 9 дней, то его производительность составляет: $\frac{150}{9} = \frac{50}{3}$ деталей в день

Решение:

Теперь определим общую производительность двух цехов вместе. Если два цеха вместе могут изготовить 150 деталей за 5 дней, то их общая производительность составляет: $\frac{150}{5} = 30$ деталей в день

Пусть производительность второго цеха составляет y деталей в день. Тогда общая производительность двух цехов вместе будет: $\frac{50}{3} + y = 30$

Решим это уравнение для y: $y = 30 - \frac{50}{3} = \frac{90}{3} - \frac{50}{3} = \frac{40}{3}$ деталей в день

Решение:

Теперь, зная производительность второго цеха, найдем количество дней, за которое он может изготовить 150 деталей:

$$x = \frac{150}{y} = \frac{150}{\frac{40}{3}} = \frac{150 \times 3}{40} = \frac{450}{40} = \frac{45}{4} = 11.25 \text{ дней}$$

Ответ: 11,25 дней

Задачи на проценты: Где используется?

Проценты повсюду: Скидки, вклады, рост

Акции и скидки: Цена со скидкой =

$$\text{Начальная цена} \times \left(1 - \frac{\text{Процент скидки}}{100}\right).$$

Банковские вклады: Сумма_с_процентами =

$$\text{Начальная\_сумма} \times \left(1 + \frac{\text{Процент года}}{100}\right).$$

Рост/снижение: Новое_значение =

$$\text{Старое\_значение} \times \left(1 \pm \frac{\text{Процент изменения}}{100}\right).$$

Пример: Задача на проценты

Условие: Цена товара была снижена на 20%, а затем, после снижения, еще на 150 рублей. Итоговая цена составила 650 рублей. Найдите первоначальную цену товара.

Анализ:

- Дано: Снижение 1 = 20%, Снижение 2 = 150 руб., Конечная цена = 650 руб.
- Найти: первоначальная цена.

Переменная: Пусть x – первоначальная цена товара.

Уравнение:

Цена после первого снижения: $x \times (1 - \frac{20}{100}) = x \times 0{,}8$.

Цена после второго снижения: $0{,}8x - 150$.

Итоговая цена: $0{,}8x - 150 = 650$.

Решение примера: Задача на проценты

Уравнение: $0{,}8x - 150 = 650$

$0{,}8x = 800$

$x = 800 \div 0{,}8$

$x = 8000 \div 8 = 1000$ (рублей) – первоначальная цена.

Проверка:

- Цена после 20% скидки: $1000 \times 0{,}8 = 800$ руб;
- Цена после снижения на 150 руб: $800 - 150 = 650$ руб.

Ответ: первоначальная цена товара составляла 1000 рублей.

Задачи на смеси и сплавы

Основные понятия:

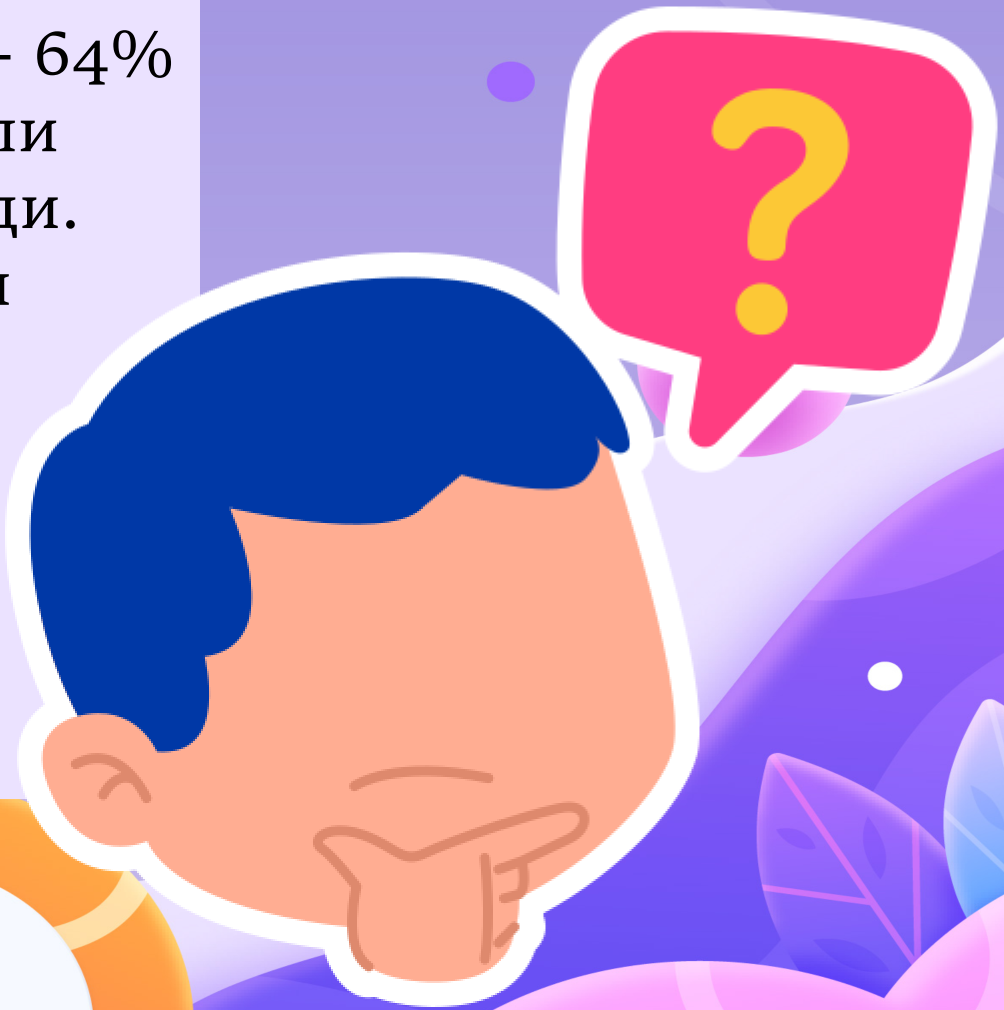
- Масса вещества: Количество чистого вещества в смеси.
- Общая масса смеси: Общий вес.
- Концентрация: $\dfrac{\text{Масса вещества}}{\text{Общая масса смеси}} \times 100\%$.
- Ключевое равенство: Масса компонента в первой смеси + масса компонента во второй смеси = масса компонента в итоговой смеси.

Пример: Задача на сплавы

Условие: Имеется два сплава. Первый сплав содержит 40% меди, второй – 64% меди. После их сплавления получили третий сплав, содержащий 50% меди. Найдите массу первого сплава, если масса второго составила 10 кг.

Анализ:

- Дано: Сплав 1 (40% Cu),
  Сплав 2 (64% Cu),
  Сплав 3 (50% Cu), $m_2 = 10$ кг.
- Найти: m_1.



Пример: Задача на сплавы

Переменные:

- m_1 – масса первого сплава.
- m_3 – масса третьего сплава ($m_3 = m_1 + m_2 = m_1 + 10$).

Уравнение (по массе меди):

- Масса меди в 1-м сплаве: $0{,}40 \times m_1$
- Масса меди во 2-м сплаве: $0{,}64 \times 10 = 6{,}4$ кг.
- Масса меди в 3-м сплаве: $0{,}50 \times m_3 = 0{,}50 \times (m_1 + 10)$.

Равенство: $0{,}40 \times m_1 + 6{,}4 = 0{,}50 \times (m_1 + 10)$.

Решение примера: Задача на сплавы

Уравнение: $0{,}4m_1 + 6{,}4 = 0{,}5(m_1 + 10)$

$0{,}4m_1 + 6{,}4 = 0{,}5m_1 + 5$

$6{,}4 - 5 = 0{,}5m_1 - 0{,}4m_1$

$1{,}4 = 0{,}1m_1$

$m_1 = 1{,}4 \div 0{,}1 = 14$ (кг) – масса первого сплава.

Проверка:

- Масса меди в 1-м сплаве: $0{,}4 \times 14 = 5{,}6$ кг;
- Масса меди во 2-м сплаве: 6,4 кг;
- Общая масса меди: $5{,}6 + 6{,}4 = 12$ кг;
- Общая масса сплава: $14 + 10 = 24$ кг;
- Концентрация меди в 3-м сплаве: $(12 \div 24) \times 100\% = 50\%$.

Ответ: Масса первого сплава составила 14 кг.

Практика 1: Задачи на движение

1. Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу из пунктов А и В. Расстояние между пунктами 24 км. Скорость второго пешехода 3 км/ч, скорость первого на 1 км/ч больше. Найдите время встречи, если расстояние составляет 24 км. Ответ: ________ ч.
2. Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми составляет 600 км, выехал автомобиль. Через 2 часа вслед за ним выехал мотоциклист. Скорость мотоциклиста на 20 км/ч больше скорости автомобиля. Найдите скорость мотоциклиста, если известно, что он догнал автомобиль через 4 часа после своего выезда.

Ответ: ________ км/ч.

Практика 1: Задачи на движение

1. Ответ: $\frac{24}{3+4} = \frac{24}{7}$ ч.
2. Пусть v — скорость автомобиля; скорость мотоциклиста v+20; время в пути автомобиля: 2 + 4 = 6 часов; время в пути мотоциклиста: 4 часа; расстояние, пройденное автомобилем: v × 6; расстояние, пройденное мотоциклистом: (v+20) × 4; Поскольку они встретились, расстояния равны: 6v = 4(v+20).

$6v = 4v + 80$

$2v = 80$

v = 40 км/ч (скорость автомобиля);

Скорость мотоциклиста: 40 + 20 = 60 км/ч.

Ответ: 60 км/ч.

Вопросы и задания для самопроверки

Какие задачи кажутся вам наиболее сложными и почему?

Задание: из двух пунктов, расстояние между которыми 450 км, одновременно навстречу друг другу выехали два поезда. Скорость первого на 10 км/ч больше скорости второго. Через сколько часов они встретятся, если скорость второго поезда 40 км/ч?

Ответ к заданию для самопроверки

Пусть x — скорость второго поезда;

$x = 40$ км/ч.

Скорость первого поезда:

$x + 10 = 40 + 10 = 50$ км/ч.

Скорость сближения: $40 + 50 = 90$ км/ч.

Время встречи: $\text{Время} = \dfrac{\text{Расстояние}}{\text{Скорость сближения}} = \dfrac{450}{90} = 5$ часов.

Ответ: Поезда встретились через 5 часов.